

Estadística Direccional: Considera los datos como vectores unidireccionales en el círculo

- Vectores unitarios
 - en el plano → círculo
 - en el espacio 3D → esfera

Algunos ejemplos circulares:

direcciones

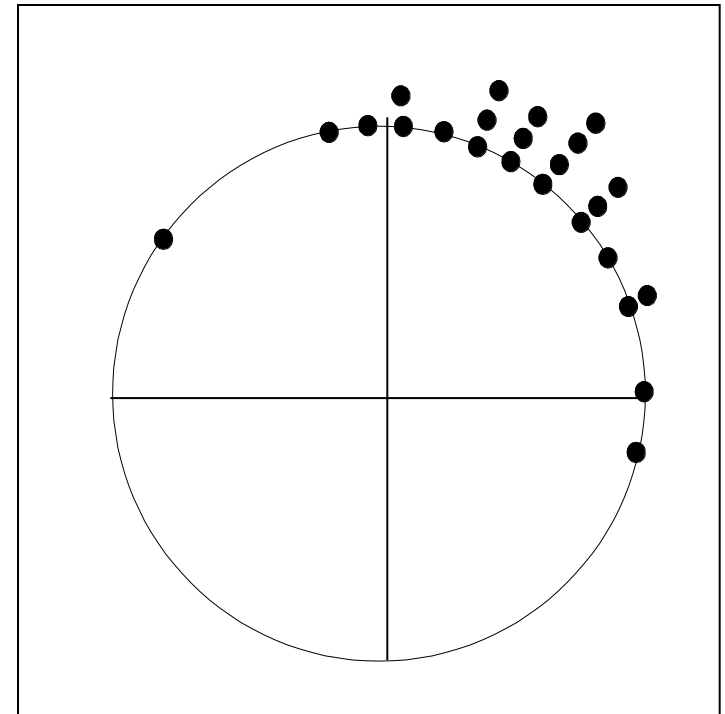
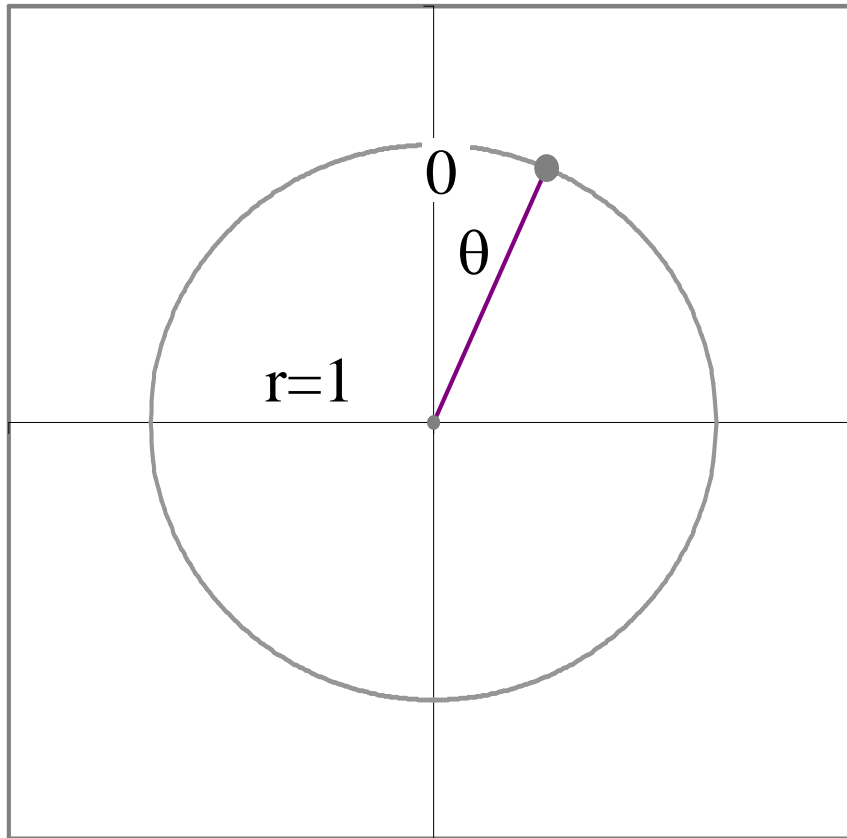
- de vientos predominantes
 - Migración de aves
- de flujo volcánico, piroclástico, surge
- de proveniencia de sedimentos
- de esfuerzos horizontales
- Corrientes

- rumbos de rasgos geológicos
- días en el año con tormentas magnéticas
- variación anual de precipitaciones

ciclos

Representación

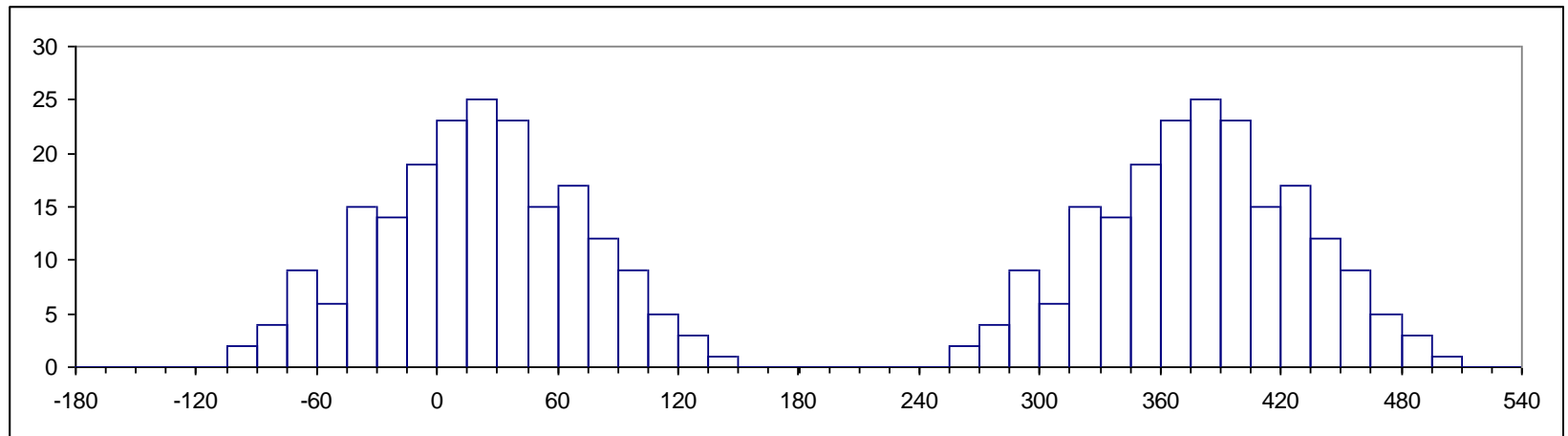
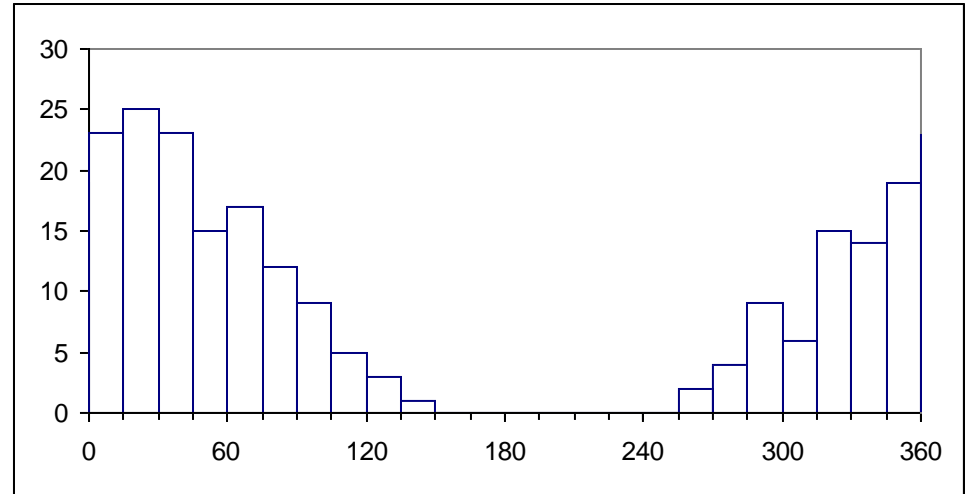
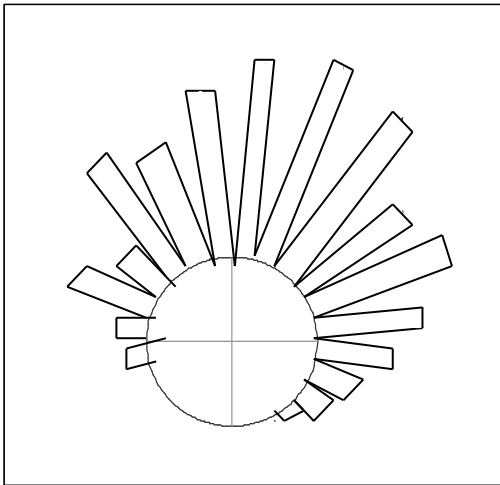
Determino un punto de inicio y un sentido de giro para marcar cada dato



Más de un dato en la misma dirección
Lo marco con más de un punto

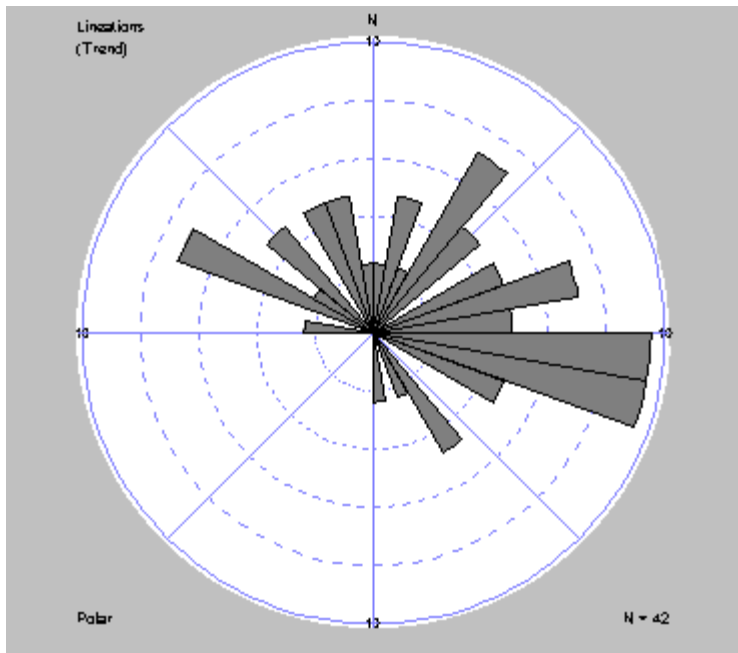
Datos agrupados en clases

Histogramas circulares \longrightarrow Histogramas lineales



Histograma circular:

- área de cada barra proporcional a la frecuencia de la clase
- cambio barras por sectores == **Diagrama de Rosas**



- área de cada sector proporcional a la frecuencia de la clase
- si las clases tienen anchos iguales, el radio de cada sector es proporcional a

$$\sqrt{f}$$

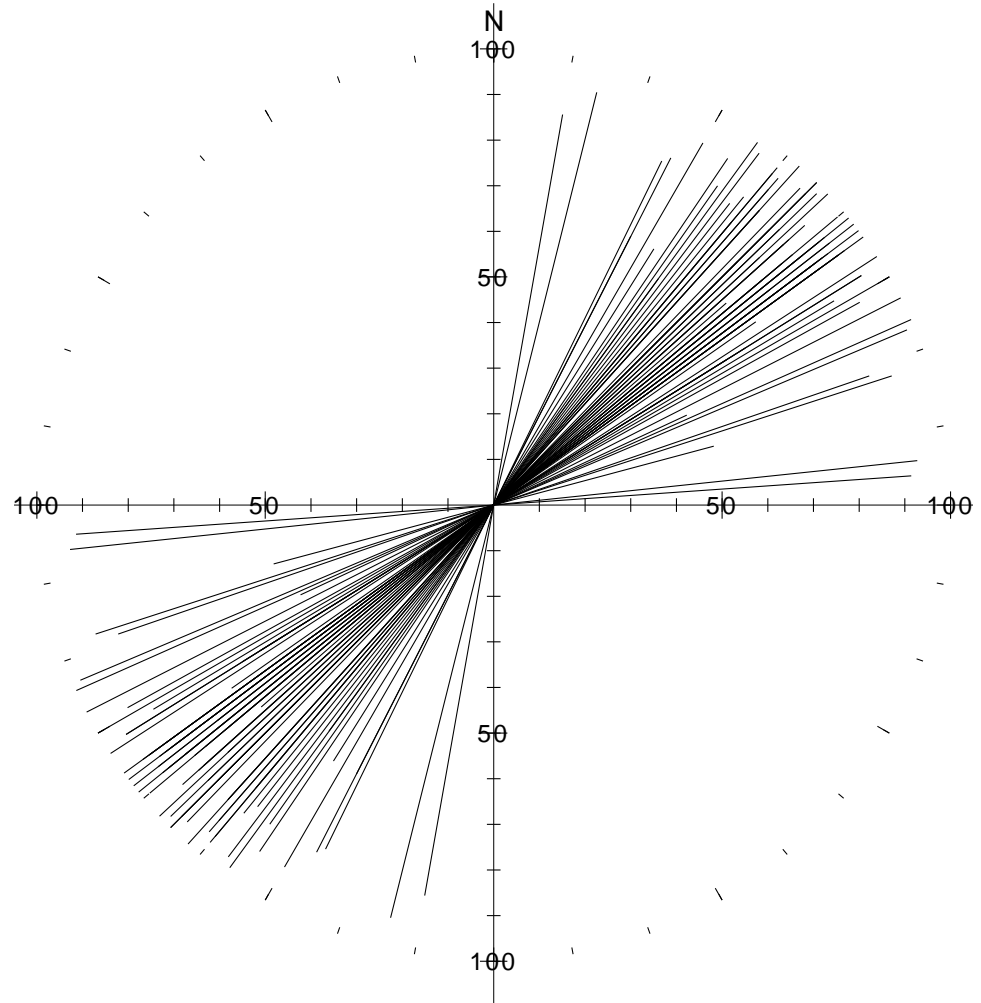
Una manera de hacer la roseta es calcular el intervalo mayor como el 100% y se calculan los demás con respecto a estos

Diagramas de rosas

Con clases de igual
ancho cambio sectores
por radios en centro de
cada clase

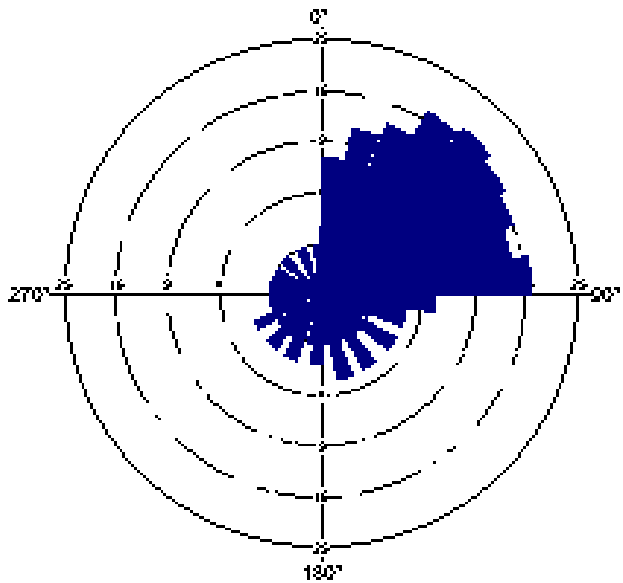
== representación
lineal

**El problema de
emplear clases es que
influye el
agrupamiento usado**



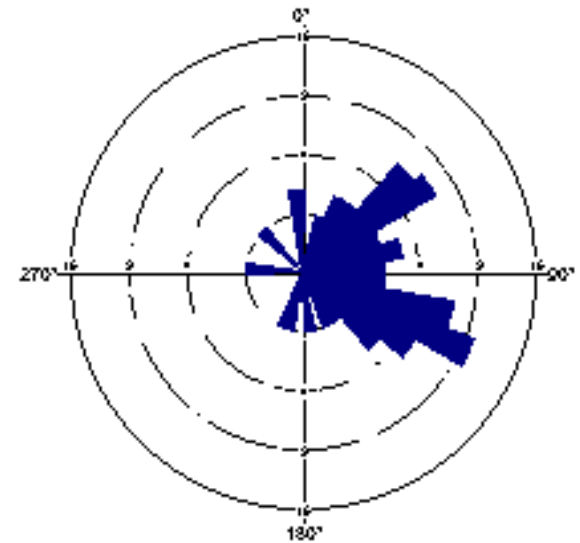
Distribuciones

Sample2

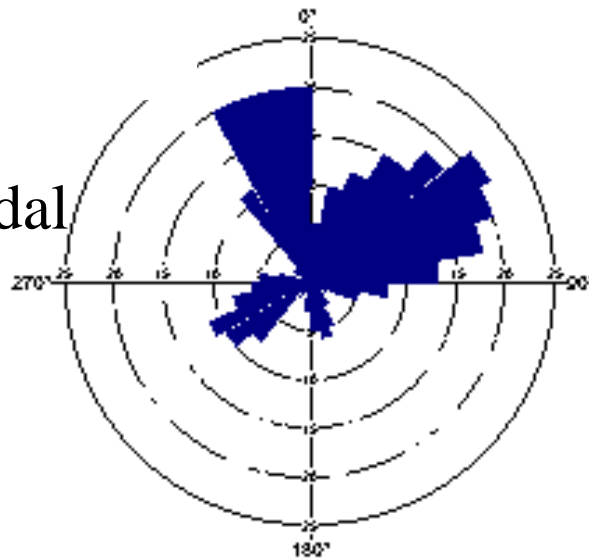


Distribución unimodal

Sample1



Distribución bimodal



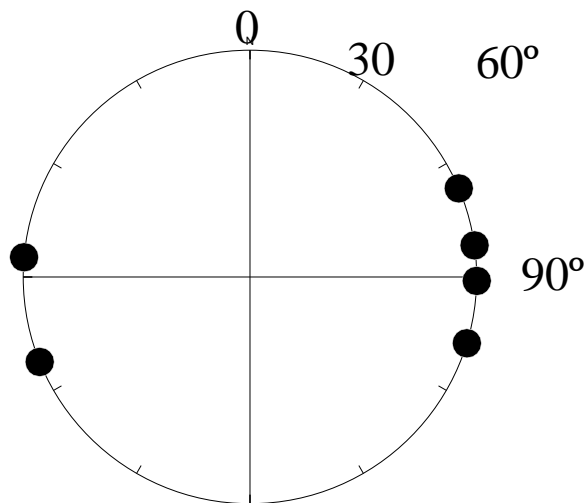
Distribución multimodal

Dr. Ana María Waller

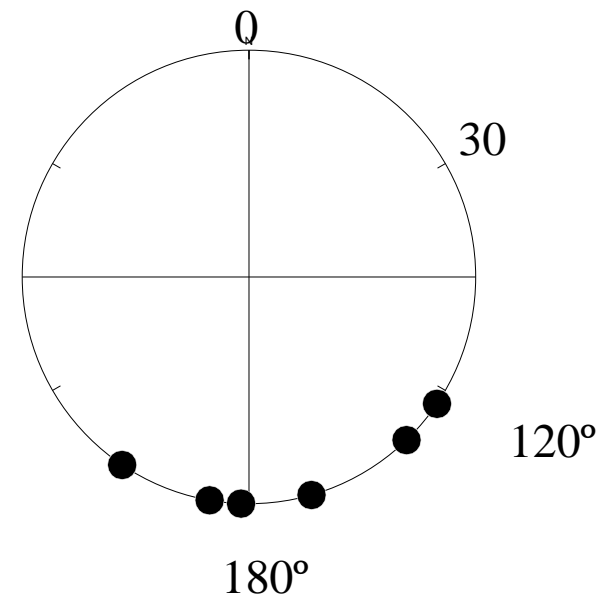
Variables Axiales

Si cada dirección es equivalente a la opuesta

Para todo datos axiales: $\theta = \theta + \pi$



Duplico
ángulos
 $\theta \longrightarrow 2\theta$



Parámetros y Estadísticos Circulares

cantidades que sirven para resumir los datos

población

muestra

estadísticos escalares



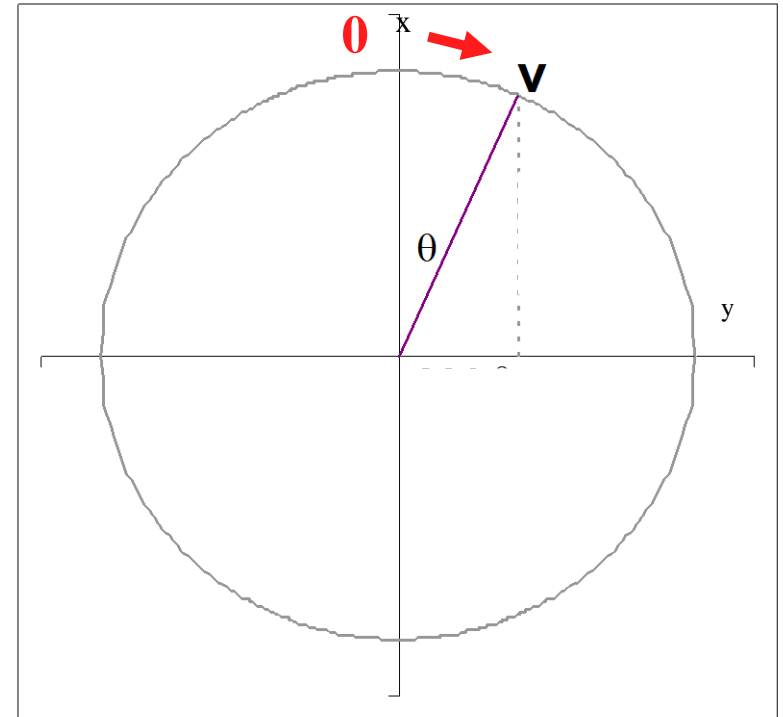
- desenrollar los datos
- elegir un punto de corte

Cada dirección en el plano = vector unitario \mathbf{v} .

Elegimos una dirección inicial (norte = 0)

y una orientación (horaria)

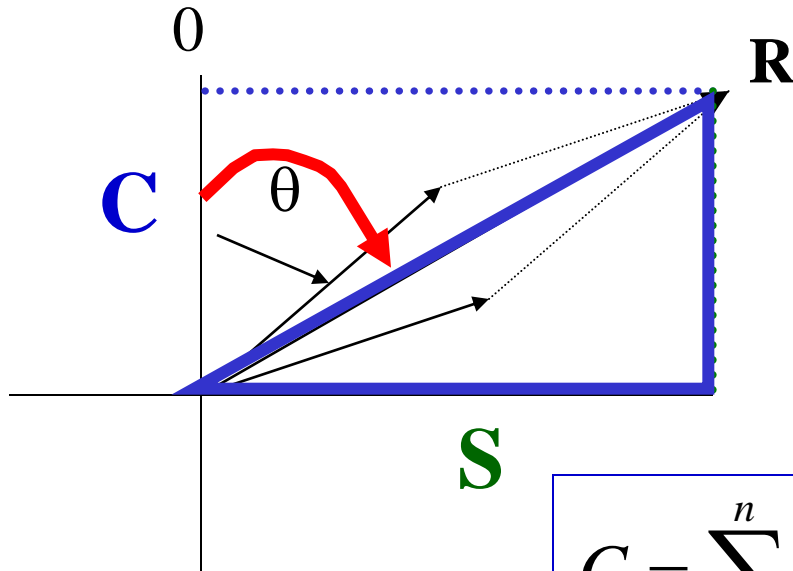
$$\mathbf{v} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ ángulo } \theta, \text{ en radianes} \\ \text{y con módulo } 2\pi \\ \\ \bullet \mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta) \end{array} \right.$$



Describir una muestra por características del conjunto

- Medidas** {
- **de posición**
 - media
 - mediana
 - **de concentración (o de dispersión)**
 - Longitud de la resultante
 - Varianza
 - Rango circular
 - **de asimetría**
 - **de curtosis**

Medidas de posición



dirección Media

= resultante de la suma vectorial

$$C = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i$$

módulo $R^2 = C^2 + S^2$

$$\theta = \begin{cases} \text{tg}^{-1} \left(\frac{S}{C} \right) \\ \text{tg}^{-1} \left(\frac{S}{C} \right) + \pi \end{cases}$$

si $C \geq 0$

si $C < 0$

dirección media

= dirección del centro de masa de los \mathbf{v}_i

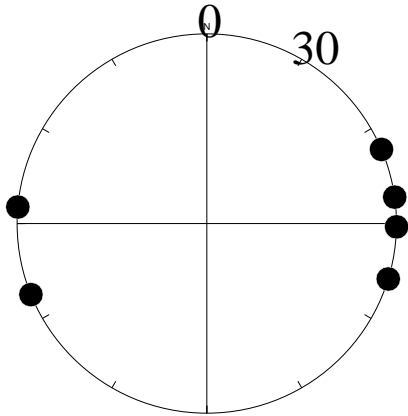
$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{C}; \bar{S}) \quad ; \quad \bar{R} = \frac{R}{n} \quad \text{con} \quad \bar{C} = \frac{C}{n} \quad ; \quad \bar{S} = \frac{S}{n}$$

$R=0$, $\bar{\theta}$ no queda definido

$\bar{\theta}$ minimiza la dispersión

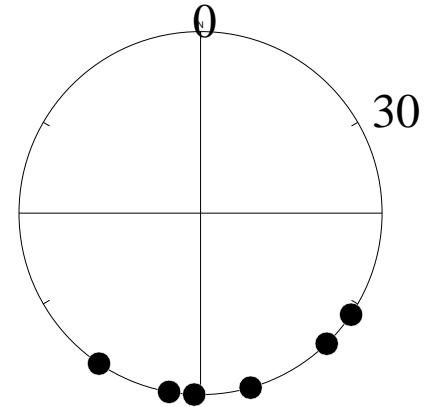
Dirección Media para datos axiales

dirección media estará influenciada por la ubicación de los datos respecto al arco de 180° considerado.



**Duplico
ángulos**

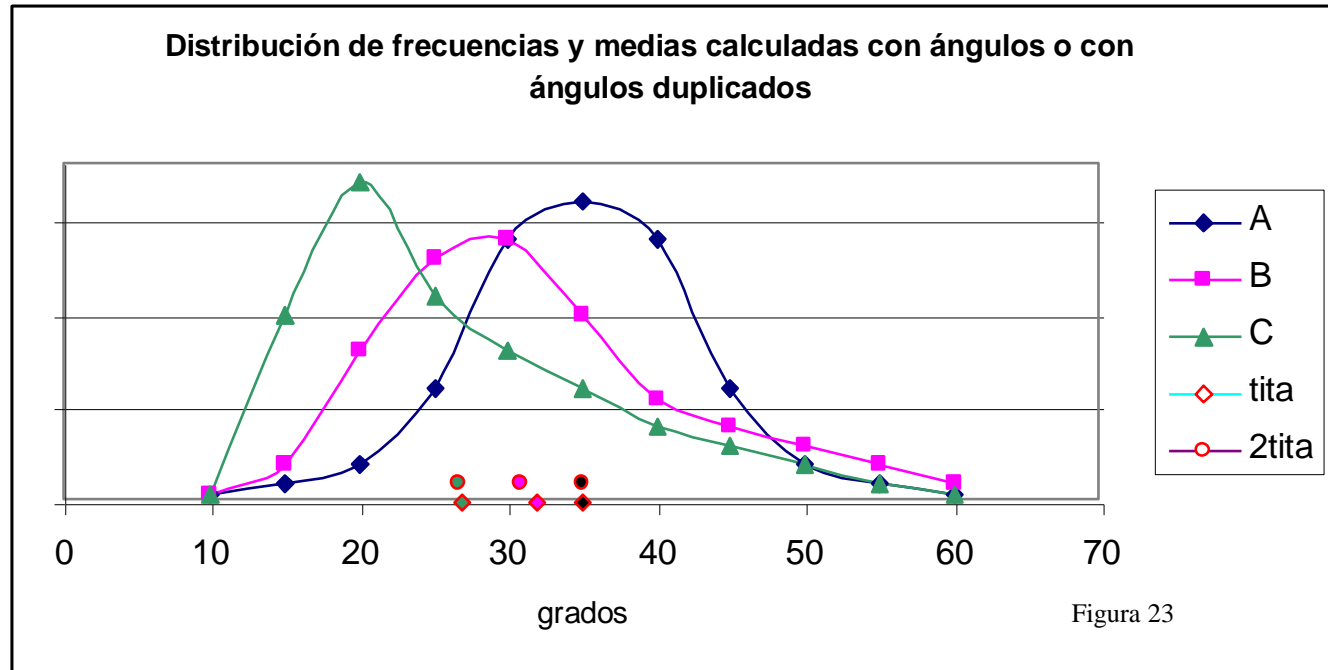
$$\theta \longrightarrow 2\theta$$



Hay diferencias entre la media calculada con 2θ y la hallada empleando las direcciones contenidas en el menor arco que abarque todos los datos.

**ambas medias solo coinciden en distribuciones
simétricas,**

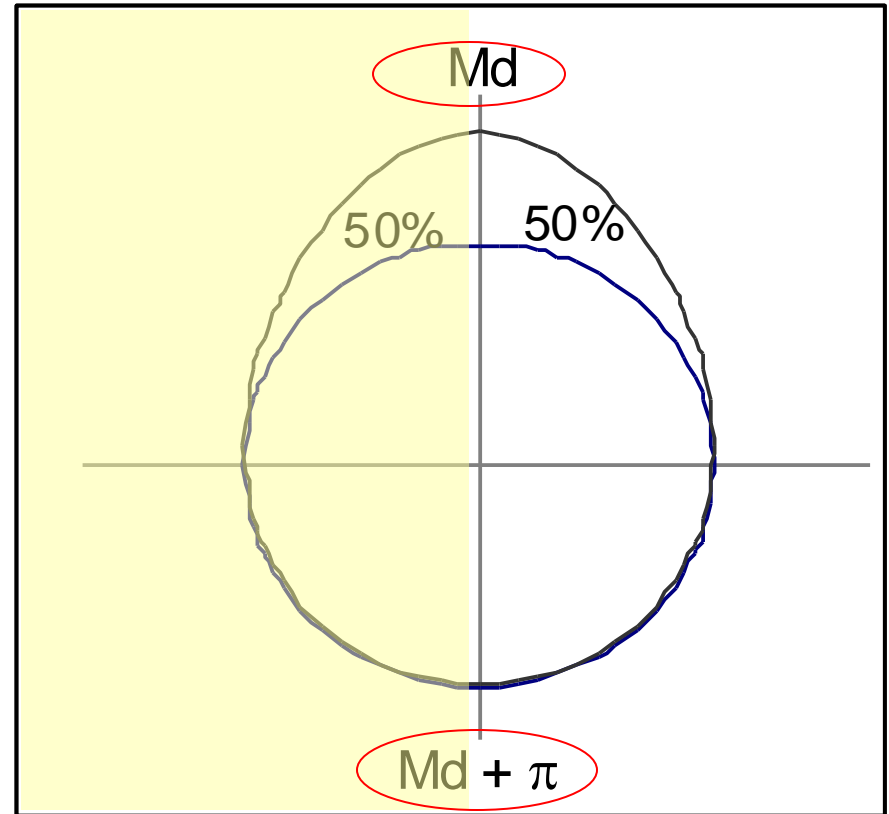
distribución simétrica = medias coincidentes



distribuciones asimétricas con distintas curtosis
las medias(2θ) desplazadas hacia las modas

La dirección Mediana

- mitad de datos en arco $(\theta_{md}; \theta_{md} + \pi)$
- mayoría de datos +cerca de θ_{md} que de $(\theta_{md} + \pi)$
- n impar, θ_{md} coincide con un dato
- n par, θ_{md} = punto medio del arco entre los 2 datos ubicados en la mitad



Medidas de concentración (o de dispersión)

- Longitud de la resultante media

$$R^2 = C^2 + S^2$$

$R/n \approx 1$... θ_i bien agrupados

$R/n \approx 0$... θ_i muy dispersos

R/n da medida de concentración del conjunto de los datos,
pero no es un valor eficaz:

datos concentrados en sitios opuestos también dan $R/n \approx 0$

Varianza circular $V = 1 - \bar{R}$ con $0 \leq V \leq 1$

presenta los mismos inconvenientes que \bar{R}

Desviación estándar circular

(SD , ν) (en radianes) $\nu = \sqrt{-2 \ln \bar{R}}$

**Desviación
estándar angular**

$$D(\bar{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\pi - \left| \pi - \left| \theta_i - \bar{\theta} \right| \right| \right)$$

dispersión en **ángulos** alrededor de la media

Rango Circular ω

Longitud del arco mínimo que
contenga todas las observaciones.

Medidas de Asimetría (skewness o sesgo)

$$\hat{s} = \frac{\bar{R}_2 \cdot \text{sen}(\bar{\theta}_2 - 2\bar{\theta})}{(1 - \bar{R})^{3/2}}$$

\bar{R}_2 = resultante media de ángulos $2\theta_i$.

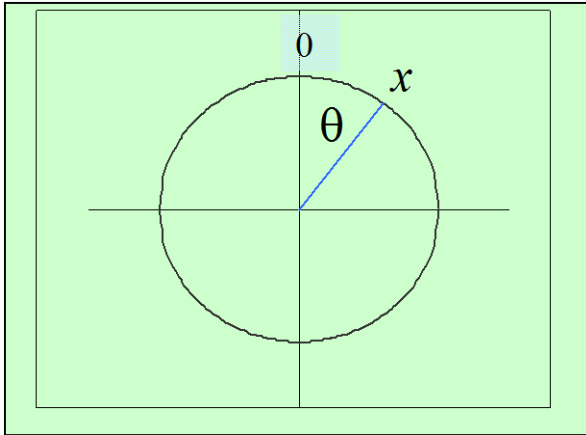
$\bar{\theta}_2$ = dirección media de ángulos $2\theta_i$.

Distribución asimétrica Mo y $\bar{\theta}$ no coinciden,
la $\bar{\theta}$ tiende a situarse corrida respecto de la Mo para el lado de
la cola más larga.

Medidas de Curtosis (o elevación)

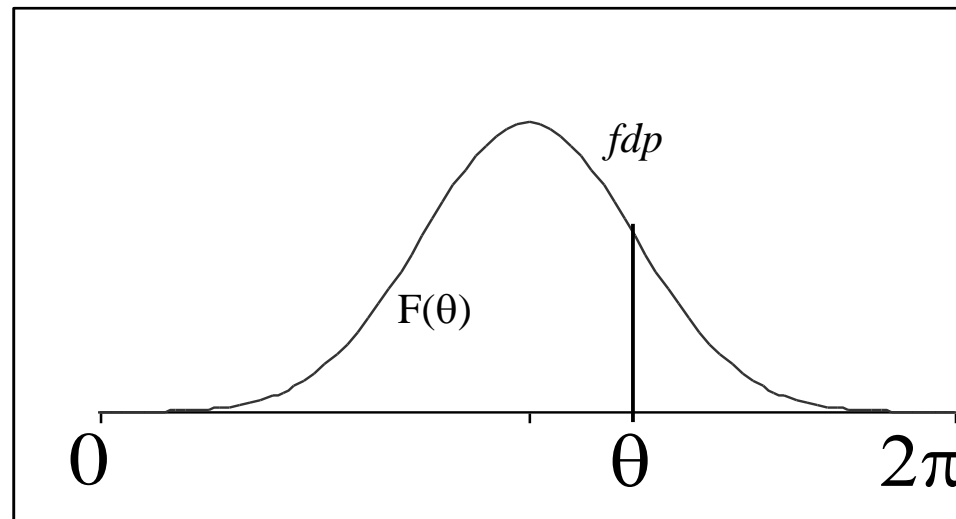
$$\hat{K} = \frac{\bar{R}_2 \cdot \cos(\bar{\theta}_2 - 2\bar{\theta}) - \bar{R}^4}{(1 - \bar{R})^2}$$

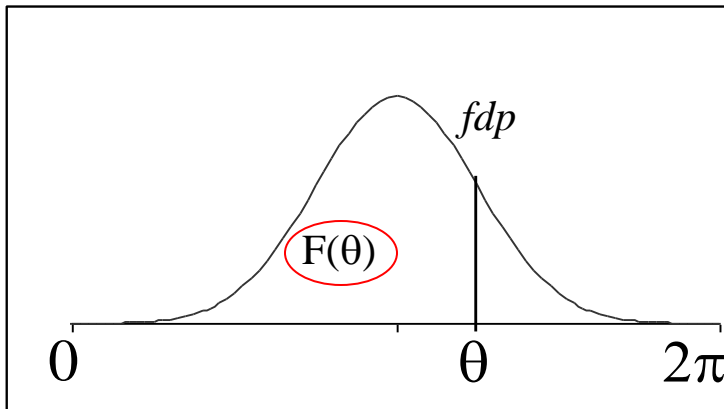
Caracterizar una distribución en el círculo unitario



Frecuencias: $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{de cada valor} \\ \bullet \text{de un intervalo} \end{array} \right.$

$f(\theta)$ = función de la curva
de probabilidad = $f d p$.





Frecuencias: $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{de cada valor} \\ \bullet \text{de un intervalo} \end{array} \right.$

$[0; \theta]$

$$F_{(x)} = \text{Prob}(0 \leq X \leq \theta), \text{ con } 0 \leq x \leq 2\pi$$

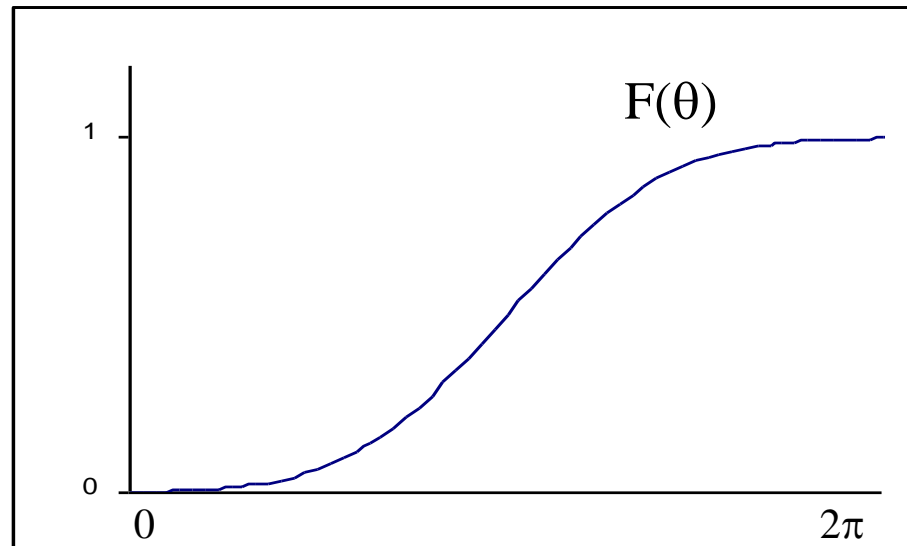
(depende del punto elegido como 0)

Función de distribución acumulada

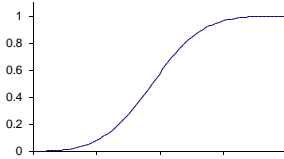
$$F(\theta) = \text{Prob}(0 \leq X \leq \theta),$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

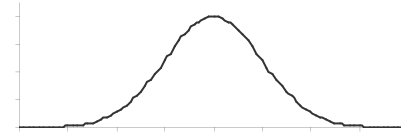
$$F(0)=0$$



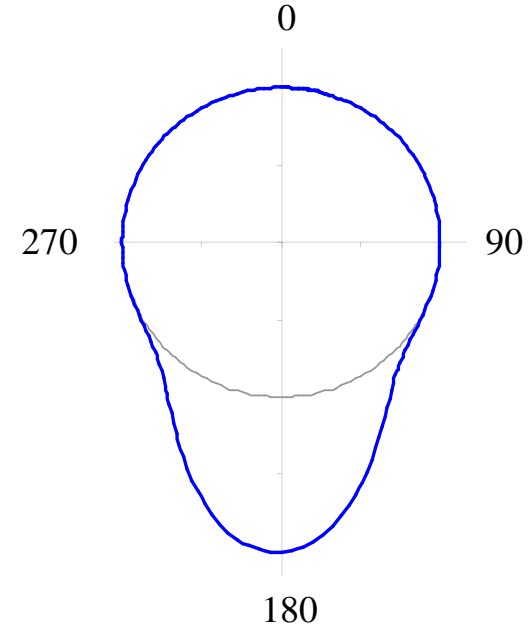
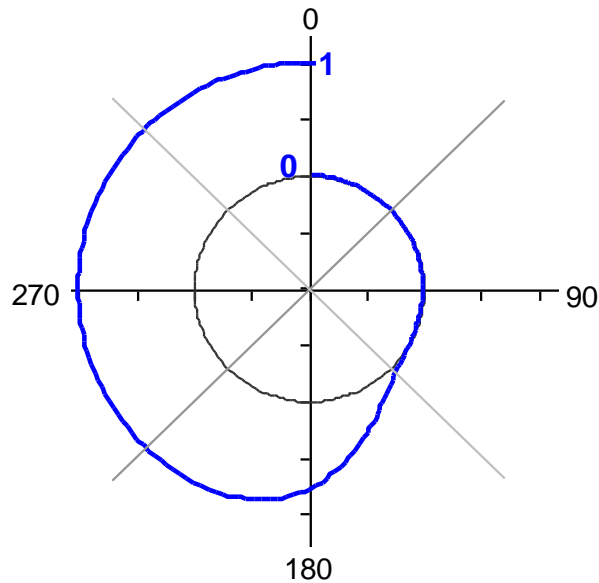
Distribución simétrica con media en 180°



$F(\theta)$ = área bajo la curva de probabilidad entre 0 y un punto (θ) dado



$f(\theta)$ = la curva representa la función densidad de probabilidad
 $= fdp$



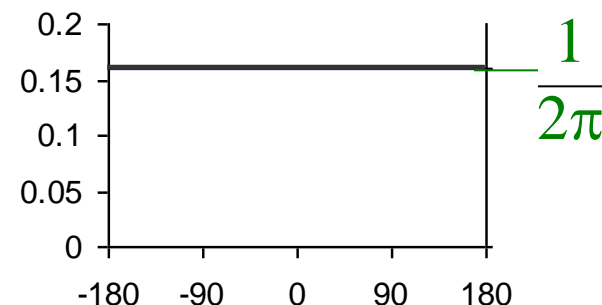
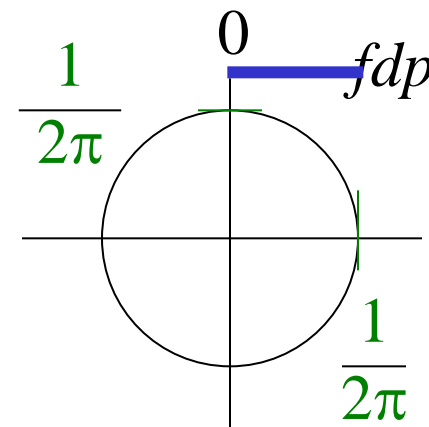
Modelos Circulares

Distribución Uniforme

Básica
Para H_0

- Ⓢ La fdp de una dist uniforme es $1/2\pi$
- Ⓢ No hay concentración en ninguna dirección

$$fdp \quad f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \longrightarrow \rho = 0$$



Función Distribución Acumulada

$$F_{(x)} = \text{Prob}(0 \leq \theta \leq x) \quad \text{Con, } 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$F_{(x)} = \int_0^x \frac{1}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{Prob}(\alpha < \theta \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \quad \text{para } \alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$$

Propiedad Aditiva:

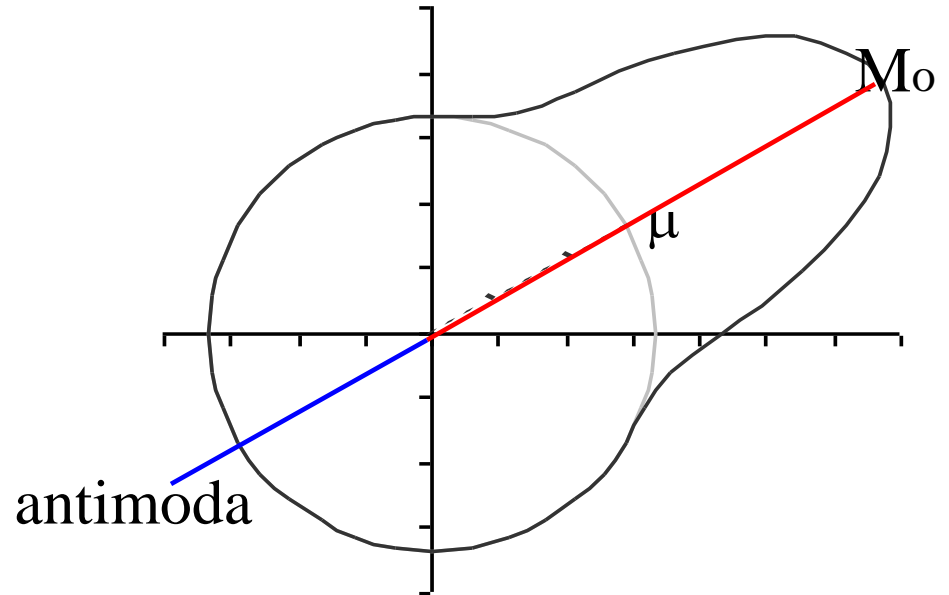
$$\theta_i \sim \text{Uc} \quad , \quad i=1, \dots, n$$

$$S_n = \sum \theta_i \sim \text{Uc}$$

Modelos Circulares

Distribución von Mises

- unimodal
- media $\mu = \text{parámetro}$
- simétrica en μ
- moda en $\theta = \mu$
- antimoda en $\theta = \mu + \pi$
- **parámetro** de concentración
 κ



Distribución von Mises

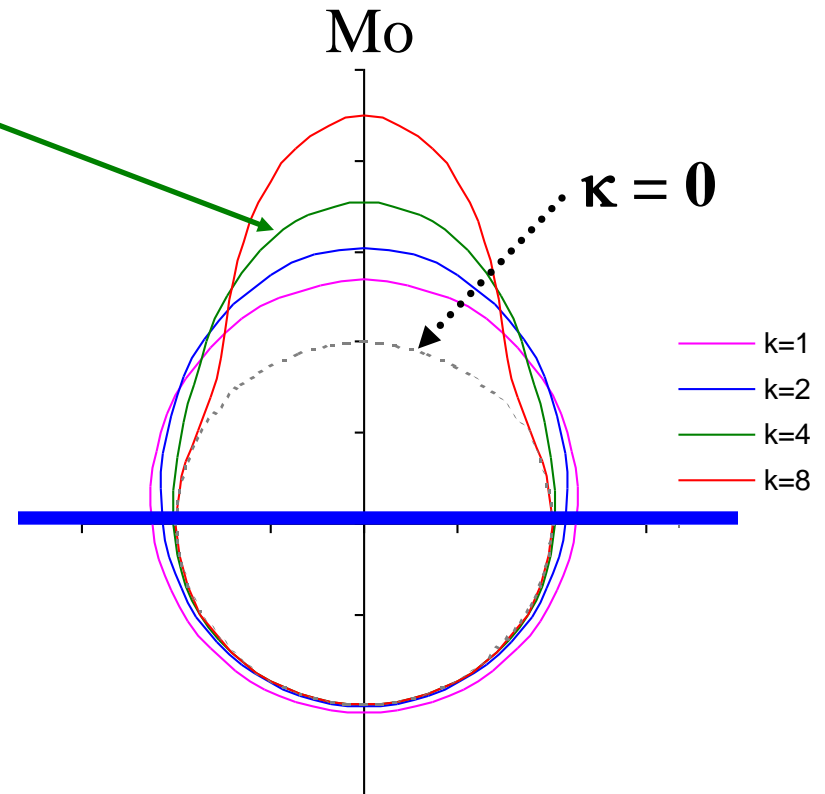
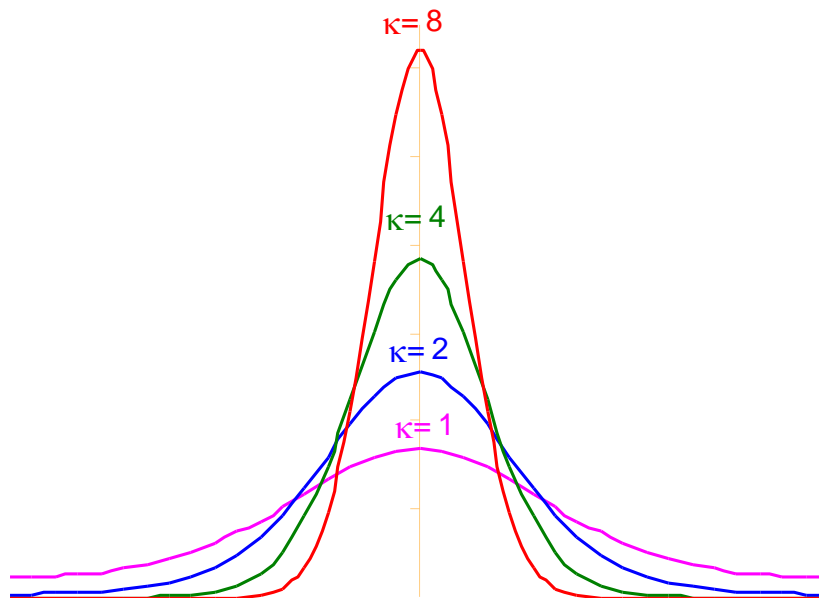
$a > \kappa > \text{agrupamiento}$

$\kappa=0$:distribución uniforme.

$\kappa=4$, 99% en $(\mu-\pi/2, \mu+\pi/2)$

parámetro de concentración κ

$$\frac{\text{Prob. Mo}}{\text{Prob. antiMo}} = \exp[2\kappa]$$



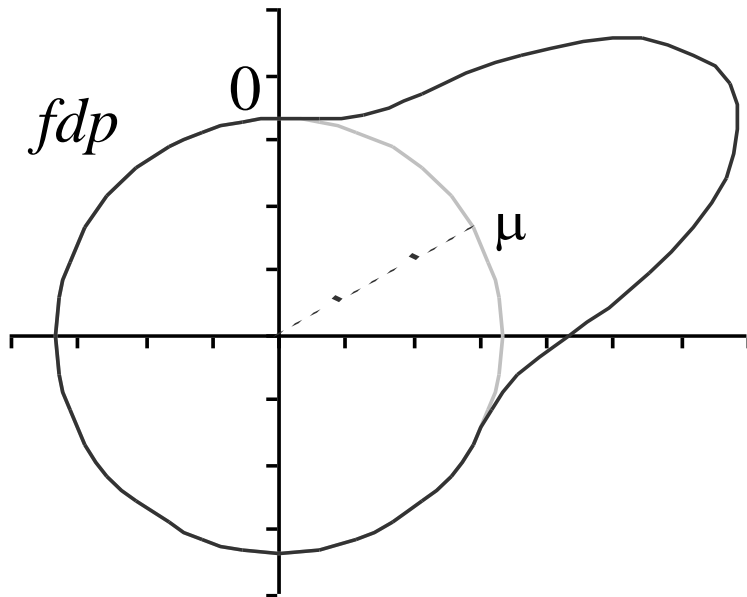
Distribución von Mises

$$fdp: f(\theta, \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi \cdot I_0(\kappa)} \cdot \exp[\kappa \cdot \cos(\theta - \mu)]$$

I_0 = función de Bessel modificada
de primer tipo y de orden cero

Aproximación de
Abramowitz y Stegun,
1965:

$$I_0(\kappa) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2r}$$



Estimar el parámetro de concentración

Para una distribución von Mises $VM_{(\mu, \kappa)}$

$$\kappa = A^{-1}(\bar{R}) \quad \text{aproximaciones}$$

$$\bar{R} < 0.53 \quad k \approx 2\bar{R} + \bar{R}^3 + \frac{5}{6}\bar{R}^5 \quad \text{Mardia y Jupp, 2000}$$

$$0.53 \leq \bar{R} < 0.85 \quad k \approx -0.4 + 1.39\bar{R} + \frac{0.43}{1 - \bar{R}} \quad \text{Fisher 1993}$$

$$\bar{R} > 0.85 \quad k = \frac{1}{2(1 - \bar{R}) - (1 - \bar{R})^2 - (1 - \bar{R})^3}$$

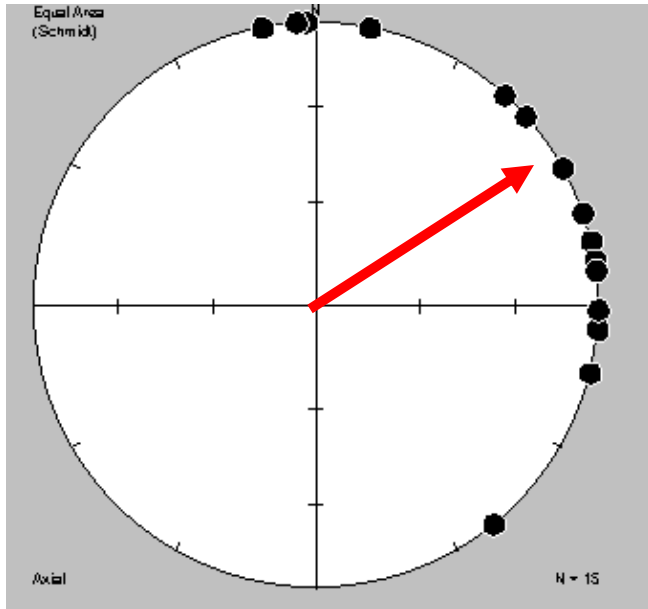
$$\bar{R} > 0.90 \quad k = \frac{1}{2(1 - \bar{R})} \quad \longrightarrow \quad k = \frac{N}{2(N - R)}$$

Problema 1:

En una roca conglomerádica se efectuó un análisis de imbricación de clastos midiéndose 15 direcciones. Calcular:

- a) la dirección media (en grados) y la longitud de la resultante (\bar{R});
- b) la varianza circular (V);
- c) la desviación estándar circular (v);
- d) la desviación estándar angular (CSD);
- e) el rango circular ω .

61°	358°	77°	42°	356°	48°	104°	95°	81°
	349°	141°	91°	71°	83°	11°		



•Calculamos:

$$a) \quad x_i = \cos \theta_i, \quad y_i = \sin \theta_i \quad i=1, \dots, 15$$

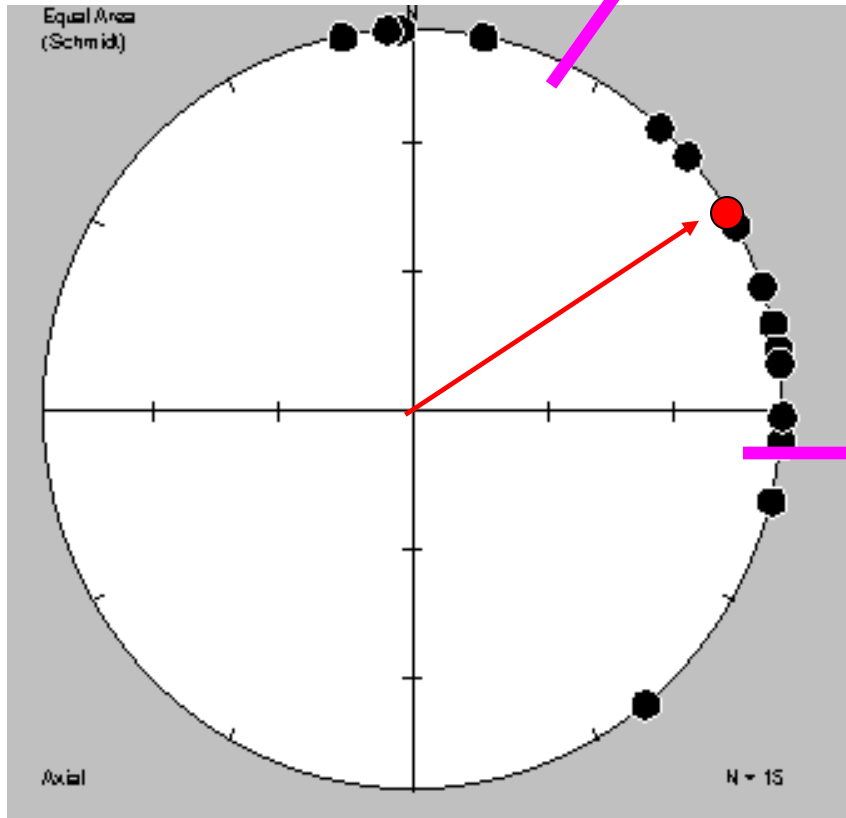
$$C = 5.5624 ; \quad S = 9.6780 ;$$

$$\theta = 60.1^\circ ; \quad R = 0.744$$

$$b) \text{ varianza circular : } V = 1 - \bar{R} = 0,256$$

$$c) \text{ SD : } \quad v = \sqrt{-2 \ln \bar{R}} \quad v = 0,769$$

$$.180/\pi = 44.06^\circ$$



$$\text{ASD} = 36.6^\circ$$

d) desviación estándar angular

$$D(\bar{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\pi - \left| \pi - \left| \theta_i - \bar{\theta} \right| \right| \right)$$

e) $\omega = 152^\circ$ rango circular = arco $(349^\circ, 141^\circ)$.